Térgeometria – megoldások

Kocka, téglatest

737 A felület $9 + 9 + 16 = 34$ négyzetből áll, ezért a felszín: $34 \cdot 5^2 = 850\ \text{cm}^2$.
A test 9 db kockából áll, így a térfogata: $9 \cdot 5^3 = 1125\ \text{cm}^3$.

738 A négyzet átlójára felírjuk a Pitagorasz-tételt, majd kifejezzük a négyzet oldalát:

$$a^2 + a^2 = 14{,}14^2 \quad \Rightarrow \quad a \approx 10\ \text{cm}.$$

a) $V = 10^3 = 1000\ \text{cm}^3$

b) Ha a testátló e, akkor $e^2 = 3a^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$, ebből $e = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm.

739 $A = 2 \cdot (2 \cdot 4 + 4 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 2) = 34\ \text{dm}^2$

740 $V = 80 \cdot 60 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot 40\right) = 76\,800\ \text{cm}^3 = 76{,}8\ \text{dm}^3 = 76{,}8$ liter

741 Az egy csúcsból kiinduló élek:

$$a - 4,\ a,\ a + 4 \quad \Rightarrow \quad 3a = 30 \quad \Rightarrow \quad a = 10,$$

tehát az élek hosszúsága: 6 cm, 10 cm, 14 cm. A téglatest térfogata:

$$V = 6 \cdot 10 \cdot 14 = 840\ \text{cm}^3.$$

742 Az egy csúcsból kiinduló élek: a, $2a$, $4a$. A térfogat:

$$a \cdot 2a \cdot 4a = 1000 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad a = 5\ \text{cm},$$

amiből az élek hosszúsága: 5 cm, 10 cm, 20 cm. A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (5 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 20 \cdot 5) = 700\ \text{cm}^2.$$

743 A különböző élek: $x - 3$, $2x$, x, ezért az összes él összege:

$$4 \cdot (x - 3 + 2x + x) = 68 \quad \Rightarrow \quad x = 5,$$

amiből az élek hossza: 2 m, 10 m, 5 m. A medence térfogata:

$$V = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100\ \text{m}^3 = 100\,000\ \text{liter}.$$

744 A kocka éle: a, a téglatest élei: $a - 2$, $a + 2$, a. A térfogatokra a következő egyenlet írható fel:

$$a^3 = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot a + 32,$$

felbontjuk a zárójeleket, rendezzük az egyenletet:

$$a^3 = a^3 - 4a + 32, \quad \text{amiből} \quad a = 8.$$

A kocka élei 8 cm, a téglatest élei 6cm, 10 cm és 8 cm hosszúak.

Hasáb, forgáshenger

745 $A = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 5) \approx 87{,}96\ \text{cm}^2$, $V = 2^2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 62{,}83\ \text{cm}^3$

746 A tea olyan henger alakot vesz fel a pohárban, amely alapkörének sugara 4 cm, magassága pedig $\frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ cm, így térfogata:

$$V = 4^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot 12\right) \approx 502{,}65\ \text{cm}^3 = 0{,}50265\ \text{dm}^3 \approx 5\ \text{dl}.$$

747 Behelyettesítünk a henger térfogatába és kifejezzük a magasságot:

$$6000 = 20^2 \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad m \approx 4{,}77\ \text{cm}.$$

748 $r^2 \cdot \pi \cdot 20 = 12\,000 \ \Rightarrow \ r \approx 13{,}8 \ \Rightarrow \ d = 27{,}6$ cm. Így két fazekat is választhatunk: a 28 cm, illetve a 30 cm átmérőjűt.

749 *a)* $A = 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 12 = 448\ \text{dm}^2$ a befestendő felület.

b) $V = 8^2 \cdot 12 = 768\ \text{dm}^3 = 768$ liter vizet tudunk maximálisan összegyűjteni.

750 Behelyettesítünk a hasáb térfogatába és kifejezzük a magasságot:

$$5 \cdot 8 \cdot m = 200 \quad \Rightarrow \quad m = 5\ \text{cm}.$$

751 Kiszámoljuk a hasáb felszínét:

$$A = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot m = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6 \cdot 30 \approx 571{,}18\ \text{cm}^2.$$

A csomagolóanyag felszíne 110%-a a doboz felszínének:

$$571{,}18 \cdot 1{,}1 = 628{,}3\ \text{cm}^2 \text{ papírra volt szükség.}$$

752 A hasáb palástja 6 db téglalapból áll:

$$T_{\text{palást}} = 6 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 6\ \text{m}^2 \text{ a befestendő terület.}$$

Gömb

753 $V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10^3 \approx 4188{,}79\ \text{m}^3$ víz fér a víztartályba.

754 *a)* A főkör kerületére felírható:

$$68{,}5 \le K < 69{,}5 \quad \Rightarrow \quad 68{,}5 \le 2r\pi < 69{,}5 \quad \Rightarrow \quad 10{,}90 \le r < 11{,}06.$$

Ebből a labda átmérője legalább 21,8 cm, de 22,12 cm-nél kevesebb.

b) A labda maximális belső sugara (levonva a labda anyagvastagságát):

$$r < 11{,}06 - 0{,}15 = 10{,}91\ \text{cm}.$$

Így a labdába maximálisan fújható levegő térfogata:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10{,}91^3 \approx 5439{,}55\ \text{cm}^3.$$

755 $4\pi \cdot r^2 = 153{,}9\ \text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad r \approx 3{,}5\ \text{cm}$

756 Behelyettesítünk a gömb térfogatának képletébe és kifejezzük r^3-t, amiből meghatározzuk a sugarat:

$$65{,}45 = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = 15{,}625 \quad \Rightarrow \quad r = 2{,}5.$$

Tehát a dísz átmérője: $d = 5$ cm.

757 A kocka éle 6 cm, felszíne: $A = 6 \cdot 6^2 = 216\ \text{cm}^2$, ebből a papírszükséglet:

$$1{,}08 \cdot 216 = 233{,}28\ \text{cm}^2.$$

758 *a)* A doboz méretei: szélesség = 8 cm, hosszúság = 12 cm, magasság = 4 cm.

b) A doboz felszíne: $A = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 8) = 352\ \text{cm}^2$.

759 A henger alapkörének sugara 3,35 cm, magassága 20,1 cm.

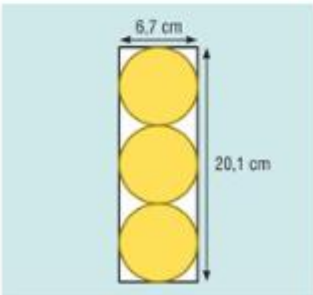
A papírból készült henger palástja olyan téglalap, amelynek oldalai: $6{,}7\pi$ cm (az alapkör kerülete) és 20,1 cm (a henger magassága).

Így a palást területe:

$$6{,}7\pi \cdot 20{,}1 \approx 423\ \text{cm}^2,$$

a papírszükséglet:

$$423 \cdot 1{,}05 = 444{,}15\ \text{cm}^2.$$



A műanyag alap- és fedőlap területe két kör területének az összege, összesen:

$$2 \cdot 3{,}35^2 \cdot \pi \approx 70{,}51 \text{ cm}^2,$$

a műanyagszükséglet:

$$70{,}51 \cdot 1{,}05 \approx 74 \text{ cm}^2.$$

760 A középső rész egy henger, amelynek sugara 4 mm, magassága $23 - 2 \cdot 4 = 15$ mm.

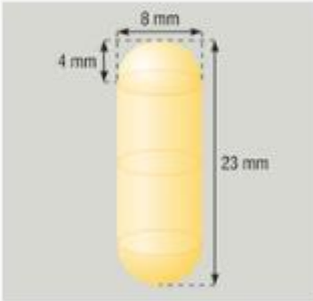
Így térfogata:

$$V_h = 4^2 \cdot \pi \cdot 15 = 240\pi \approx 753{,}98 \text{ mm}^3.$$

A két végén levő két félgömb együtt egy 4 mm sugarú gömböt alkot.

Így térfogata:

$$V_g = \frac{4 \cdot 4^3 \cdot \pi}{3} = \frac{256\pi}{3} \approx 268{,}08 \text{ mm}^3.$$



Ebből a kapszula külső térfogata:

$$V_k = 753{,}98 + 268{,}08 = 1022{,}06 \text{ mm}^3,$$

belső térfogata:

$$V_b = 0{,}95 \cdot V_k = 0{,}95 \cdot 1022{,}06 \approx 970{,}957 \text{ mm}^3 < 1000 \text{ mm}^3.$$

Tehát nem fér bele a kapszulába 1 cm^3 gyógyszer.

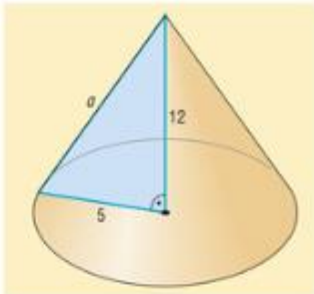
Forgáskúp, csonka kúp

761 A kúp tengelymetszetébe behúzzuk a testmagasságot, a kapott derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$12^2 + 5^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = 13 \text{ cm a kúp alkotója.}$$

A kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot 5 \cdot (5 + 13) \approx 282{,}74 \text{ cm}^2.$$



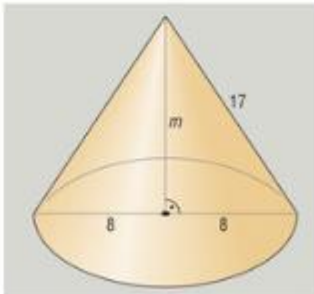
762 Az ábrán látható derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$8^2 + m^2 = 17^2 \quad \Rightarrow \quad m = 15 \text{ cm}.$$

A gyertya térfogata:

$$V = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 15}{3} \approx 1005{,}3 \text{ cm}^3.$$

Tehát 1005,3 cm^3 viasz szükséges a gyertyához.



763 A kúp nyílásszöge 60°, így tengelymetszete egyenlő oldalú háromszög, alapkörének sugara 5 cm, alkotója 10 cm, magassága:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66 \text{ cm}.$$

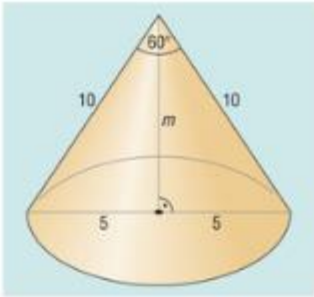
(Ugyanez adódik a Pitagorasz-tételből:

$$5^2 + m^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad m = 8{,}66 \text{ cm.})$$

A gömb felszíne és térfogata:

$$A = \pi \cdot 5 \cdot (5 + 10) \approx 235{,}62 \text{ cm}^2;$$

$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8{,}66}{3} \approx 226{,}72 \text{ cm}^3.$$



764 A kúp palástja olyan körcikk, amelynek sugara a kúp alkotója. A körcikk ívhossza egyenlő a kúp alapkörének kerületével:

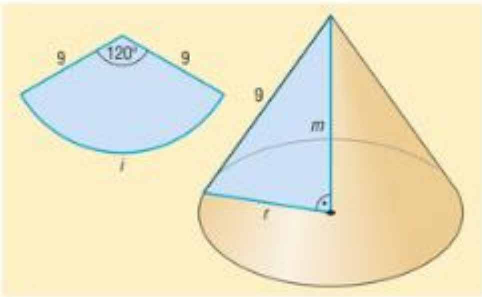
$$i = \frac{2 \cdot 9 \cdot \pi}{360°} \cdot 120° = 2r \cdot \pi,$$

ebből az egyenletből kiszámoljuk az alapkör sugarát:

$$r = 3 \text{ cm}.$$

A kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 9) \approx 113{,}1 \text{ cm}^2.$$



765 A kúp palástja olyan körcikk, amelynek sugara a kúp alkotója. A körcikk ívhossza egyenlő a kúp alapkörének kerületével:

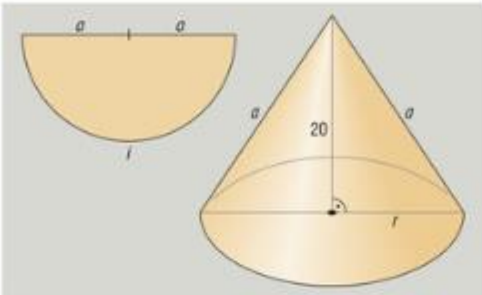
$$i = \frac{2 \cdot a \cdot \pi}{2} = 2r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad a = 2r.$$

A tengelymetszet-háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk, majd az egyenlet rendezésével kiszámoljuk az alapkör sugarát:

$$r^2 + 20^2 = (2r)^2 \;\Rightarrow\; 400 = 3r^2 \;\Rightarrow\; r \approx 11{,}55 \text{ cm},$$

tehát a palástot alkotó félkörlap sugara:

$$a = 23{,}1 \text{ cm}.$$



766 A tengelymetszet-háromszögre felírjuk a Pitagorasz tételt:

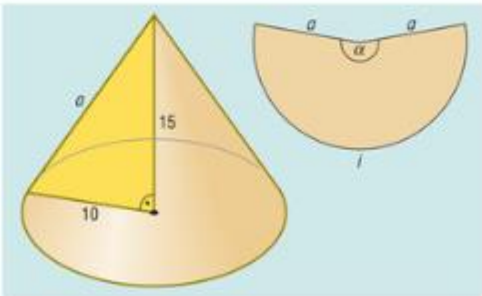
$$15^2 + 10^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a \approx 18 \text{ cm}.$$

A kúp palástja olyan körcikk, amelynek sugara a kúp alkotója. A körcikk ívhossza egyenlő a kúp alapkörének kerületével:

$$i = \frac{2 \cdot 18 \cdot \pi}{360°} \cdot \alpha = 2 \cdot 10 \cdot \pi,$$

ebből átrendezéssel kiszámoljuk a középponti szöget:

$$\alpha = 200°.$$



767 Egy kúp elkészítéséhez a kört 8 egybevágó körcikkre osztjuk, amelynek középponti szöge:

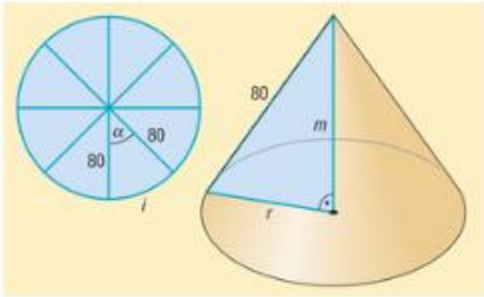
$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

A körcikk ívhossza egyenlő a kúp alapkörének kerületével:

$$i = \frac{2 \cdot 80 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 45^\circ = 2r \cdot \pi,$$

amiből az alapkör sugara:

$$r = 10 \text{ cm}.$$



A tengelymetszetre felírjuk a Pitagorasz-tételt, majd kiszámoljuk a kúp magasságát:

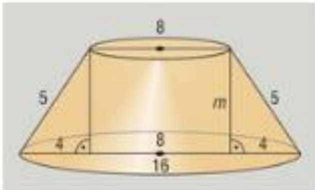
$$10^2 + m^2 = 80^2 \quad \Rightarrow \quad m \approx 79{,}37 \text{ cm}.$$

Tehát a keletkező kúp 79,37 cm magas.

768 A csonka kúp tengelymetszete az adott egyenlő szárú trapéz, amelynek párhuzamos oldalai a kúp alap- és fedőkörének átmérői, szárai a kúp alkotója, magassága a testmagasság.

A tengelymetszetben látható derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$4^2 + m^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad m = 3 \text{ cm}.$$



A csonka kúp felszíne és térfogata:

$$A = \pi \cdot [8^2 + 4^2 + 5 \cdot (8 + 4)] \approx 439{,}82 \text{ cm}^2, \qquad V = \frac{\pi \cdot 3}{3} \cdot (8^2 + 4^2 + 8 \cdot 4) \approx 351{,}86 \text{ cm}^3.$$

megoldások 0 9 7

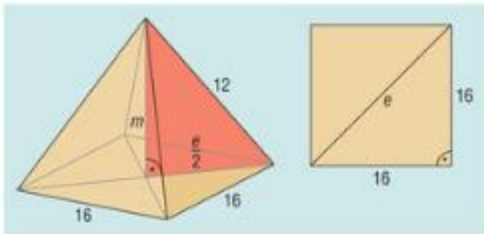
Gúla, csonka gúla

769 A gúla alaplapja négyzet, amelynek átlóját Pitagorasz tétellel számoljuk ki:

$$16^2 + 16^2 = e^2 \quad \Rightarrow \quad e \approx 22{,}6 \text{ cm};$$

A gúla tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja a négyzet átlója, szára a gúla oldaléle, magassága a testmagasság. Felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$11{,}3^2 + m^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad m \approx 4 \text{ cm}.$$

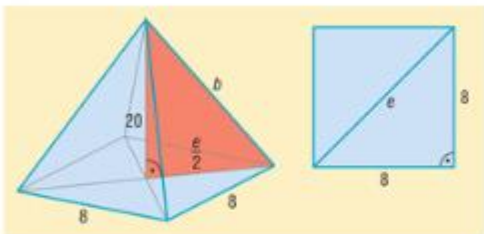


A gúla térfogata:

$$V = \frac{16^2 \cdot 4}{3} \approx 341{,}3 \text{ cm}^3.$$

770 Az alaplap (négyzet) átlója a tengelymetszetként kapott egyenlő szárú háromszög alapja. A szabályos négyoldalú gúla felszíne:

$$A = 8^2 + 8 \cdot \sqrt{4 \cdot 20^2 + 8^2} \approx 390{,}34 \text{ cm}^2.$$



771 A gúla oldallapjai egyenlő szárú háromszögek, amelyeknek az alapja a gúla alapéle, szárai a gúla oldalélei. A Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk a lapmagasságot:

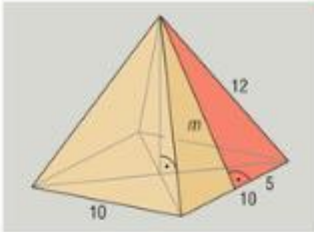
$$m^2 + 5^2 = 12^2 \;\Rightarrow\; m \approx 10{,}9 \text{ cm}.$$

A palást 4 db egyenlő szárú háromszögből áll, így a palást felszíne:

$$A_{\text{palást}} = 4 \cdot \frac{10 \cdot 10{,}9}{2} = 218 \text{ m}^2,$$

a szükséges cserépmennyiség:

$$218 \cdot 1{,}12 = 244{,}16 \text{ m}^2.$$



772 Mivel a gúla oldallapja és alaplapja által bezárt szög 60°, a gúla alaplapjának középvonala és az oldallapok magasságai olyan egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg, amelynek magassága a gúla magassága. Ebből a háromszögből pl. szögfüggvény segítségével meghatározható a gúla alapéle:

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{8}{x} \quad \text{amiből} \quad x \approx 4{,}6 \text{ cm}.$$

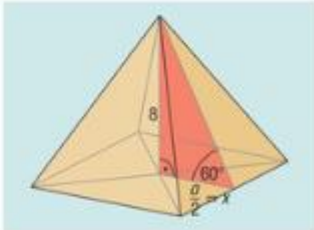
Ebből a gúla alapéle: $a = 9{,}2$ cm.

Egy gyertya térfogata:

$$V = \frac{9{,}2^2 \cdot 8}{3} \approx 225{,}7 \text{ cm}^3.$$

A szükséges viaszmennyiség:

$$\frac{225{,}7}{0{,}94} \approx 240{,}1 \text{ cm}^3.$$



773 A gúla oldallapja egyenlő szárú háromszög. Felírjuk az oldallap magasságára a Pitagorasz-tételt:

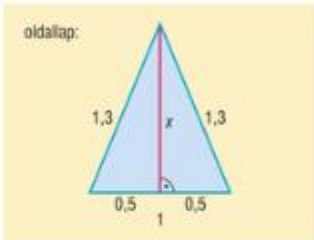
$$x^2 + 0{,}5^2 = 1{,}3^2 \;\Rightarrow\; x = 1{,}2 \text{ m}.$$

A pavilon palástja 6 db egyenlő szárú háromszögből áll, így a felület:

$$A_{\text{palást}} = 6 \cdot \frac{1 \cdot 1{,}2}{2} = 3{,}6 \text{ m}^2.$$

A szükséges festékmennyiség:

$$3{,}6 \cdot 1{,}2 = 4{,}32 \text{ kg}.$$

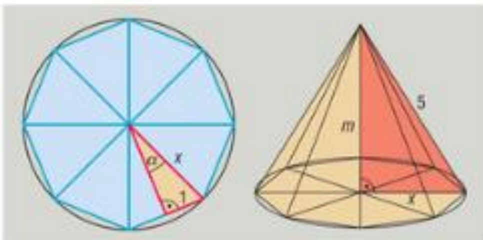


774 A szabályos nyolcszög 8 db egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyeknek a szárszöge:

$$2\alpha = \frac{360°}{8} = 45°.$$

Szögfüggvénnyel kiszámoljuk a nyolcszög köré írt kör sugarát:

$$\sin 22{,}5° = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x \approx 2{,}6 \text{ cm}.$$



A Pitagorasz-tétellel a testmagasság:

$$2{,}6^2 + m^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad m \approx 4{,}27 \text{ cm.}$$

Az alaplap területe a 8 db egybevágó háromszög területének összege:

$$T_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{2{,}6 \cdot 2{,}6 \cdot \sin 45^\circ}{2} \approx 19{,}12 \text{ cm}^2.$$

Egy ajándék térfogata:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{19{,}12 \cdot 4{,}27}{3} \approx 27{,}21 \text{ cm}^3.$$

A rendelkezésre álló fém térfogata:

$$V_{\text{kocka}} = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$

Az ajándékok száma:

$$1000 : 27{,}21 \approx 36{,}75.$$

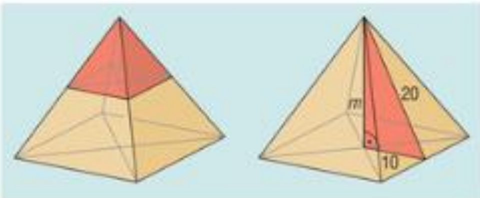
Legfeljebb 36 db ajándékot lehet önteni.

775 Felírjuk a Pitagorasz-tételt a gúla testmagasságára:

$$m^2 + 10^2 = 20^2,$$

amiből

$$m \approx 17{,}32 \text{ cm};$$



A gúla térfogata:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{20^2 \cdot 17{,}32}{3} \approx 2309 \text{ cm}^3.$$

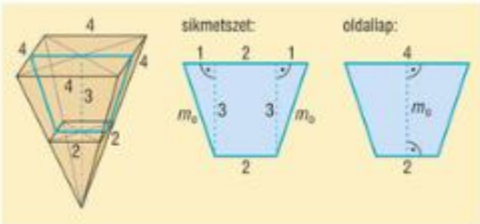
A párhuzamos vágás miatt az eredeti gúlát egy kisebb gúlára és egy csonkagúlára vágjuk szét, ahol a két gúla hasonló.

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \text{ezért} \quad \frac{V_{\text{kisgúla}}}{V_{\text{gúla}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{kisgúla}} = \frac{2309}{8} \approx 289 \text{ cm}^3.$$

A csonka gúla térfogata a két gúla térfogatának különbsége: $2309 - 289 = 2020 \text{ cm}^3$.

776 A síkmetszet egyenlő szárú trapéz, amelynek szára az oldallap magassága. A Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk ezt a magasságot:

$$1^2 + 3^2 = m_o^2 \quad \Rightarrow \quad m_o \approx 3{,}16 \text{ cm.}$$



Ebből:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{4+2}{2} \cdot 3{,}16 = 9{,}48 \text{ m}^2;$$

$$T_{\text{palást}} = 4 \cdot 9{,}48 = 37{,}92 \text{ m}^2.$$

A tartályok alaplapját és a palástot kívül-belül befestjük.

A festendő felület egy tartály esetén:

$$2 \cdot (2^2 + 37{,}92) = 83{,}84 \text{ m}^2.$$

30 tartály esetén:

$$30 \cdot 83{,}84 = 2515{,}2 \text{ m}^2.$$

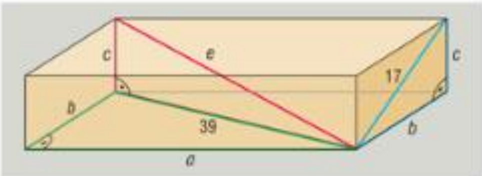
Vegyes feladatok testek felszínére, térfogatára

777 A henger alapkörének sugara 2 cm, magassága 12 cm.
A gyertya felszíne:
$$A = 2 \cdot 2^2 \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 \approx 175{,}93\ \text{cm}^2.$$

778 A henger alakú doboz alapkörének sugara 4 cm, magassága 8 cm, így felszíne és térfogata:
$$A_\text{h} = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (4 + 8) = 96\pi\ \text{cm}^2,$$
$$V_\text{h} = 4^2 \cdot \pi \cdot 8 = 128\pi\ \text{cm}^3.$$
A kocka alakú doboz minden éle 8 cm, így felszíne és térfogata:
$$A_\text{k} = 6 \cdot 8^2 = 384\ \text{cm}^2,$$
$$V_\text{k} = 8^3 = 512\ \text{cm}^3.$$
a) $\dfrac{A_\text{h}}{A_\text{k}} = \dfrac{96\pi}{384} = \dfrac{\pi}{4}$ *b)* $\dfrac{V_\text{h}}{V_\text{k}} = \dfrac{128\pi}{512} = \dfrac{\pi}{4}$

779 A gömb térfogatából kiszámoljuk a labda belső sugarát:
$$268 = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r \approx 4\ \text{dm}.$$
Ebből a labda belső átmérője 8 dm = 80 cm.

780 Az adatok alapján felírható a Pitagorasz-tétel a testátlóra és a két lapátlóra:
$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1585 \\ a^2 + b^2 &= 39^2 \\ b^2 + c^2 &= 17^2 \end{aligned}\right\}.$$



Behelyettesítjük az 1. egyenlet bal oldalába a 2. egyenlet bal oldalát, ebből kiszámoljuk c-t. Hasonlóan az 1. egyenlet bal oldalába a 3. egyenlet bal oldalát, ebből kiszámoljuk a-t:
$$\left.\begin{aligned} 39^2 + c^2 &= 1585 \\ a^2 + 17^2 &= 1585 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c = 8\ \text{cm}, \quad a = 36\ \text{cm}, \quad b = 15\ \text{cm}.$$
Az élvázhoz szükséges drótmennyiség:
$$4 \cdot (8 + 36 + 15) = 236\ \text{cm}.$$

781 *a)* I. Olyan henger keletkezik, amely alapkörének sugara 10 cm, magassága 10 cm, így a felszín és a térfogat:
$$A = 2\pi \cdot 10 \cdot (10 + 10) \approx 1257\ \text{cm}^2,$$
$$V = 10^2 \cdot \pi \cdot 10 \approx 3142\ \text{cm}^3.$$

II. Olyan henger keletkezik, amely alapkörének sugara 5 cm, magassága 10 cm, így a felszín és a térfogat:
$$A = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 10) \approx 471\ \text{cm}^2,$$
$$V = 5^2 \cdot \pi \cdot 10 \approx 785\ \text{cm}^3.$$

III. Olyan két kúpból álló forgástest keletkezik, amelyek alapkörének sugara és magassága a négyzet átlójának a fele, azaz $5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm, így a felszín és a térfogat:

$$A = 2\pi \cdot r \cdot a = 2\pi \cdot 7{,}07 \cdot 10 \approx 444 \text{ cm}^2,$$

$$V = 2 \cdot \frac{(7{,}07)^2 \cdot \pi \cdot 7{,}07}{3} \approx 740 \text{ cm}^3.$$

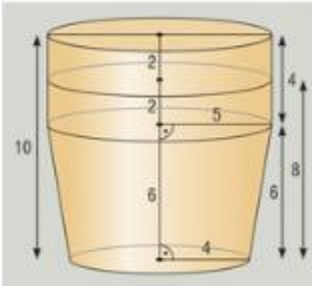
b) Az első test felszíne a második test felszínének $\frac{1257}{471} \approx 2{,}67$-szerese.

c) A harmadik test térfogata a második test térfogatának $\frac{740}{785} \approx 0{,}9427$-szerese, azaz 94,27%-a.

782 A virágtartóban levő föld összesen $10 \cdot \frac{4}{5} = 8$ cm magasan lesz, ami a csonka kúp alakú résznél 6 cm, a hengeres részben viszont csak 8 cm – 6 cm = 2 cm-t jelent.

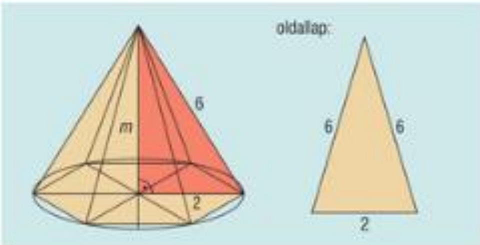
A virágföld két részből áll: az egyik rész egy csonka kúp (alapkörének sugara 4 cm, fedőkörének sugara 5 cm, magassága 6 cm), a másik rész pedig egy henger (alapkörének sugara 5 cm, magassága 2 cm).

$$V = 5^2 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (5^2 + 4^2 + 5 \cdot 4) \approx 540{,}4 \text{ cm}^3.$$



Tehát összesen 0,5404 liter virágföld fér a virágtartóba.

783 Az alaplap szabályos hatszög, így a köré írható kör középpontjából felbontható 6 darab 2 m oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszögre.



a) A testmagasságra felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$m^2 + 2^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad m \approx 5{,}66 \text{ méter}.$$

b) Az oldallap háromszög területét Heron-képlettel (ami kiegészítő anyag, de érdemes tudni, mert gyors vele a számolás) határozzuk meg. Ehhez a „félkerület":

$$s = \frac{6+6+2}{2} = 7.$$

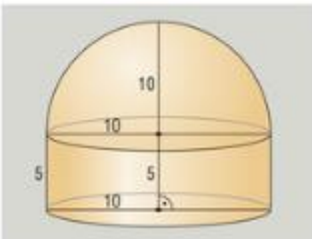
Egy oldallap területe:

$$T_\triangle = \sqrt{7(7-6)(7-6)(7-2)} \approx 5{,}92 \text{ m}^2.$$

A vászon területe: $6 \cdot 5{,}92 = 35{,}52 \text{ m}^2$.

784 A csillagvizsgáló két testre bontható: egy hengerre (az alapkörének sugara 10 m, a magassága 5 m) és egy félgömbre (sugara 10 m). Így a klimatizálandó térfogat is két részből áll:

$$V = 10^2 \cdot \pi \cdot 5 + \frac{2\pi}{3} \cdot 10^3 \approx 3665{,}2 \text{ m}^3.$$



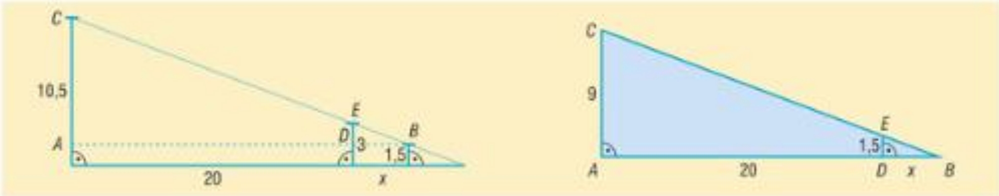
Összefoglaló feladatsor

Geometria, koordináta-geometria, trigonometria

785 *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* hamis

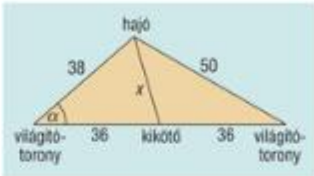
786 A megfigyelő szemmagasságában párhuzamost húzunk a talajjal, majd a kapott ABC és DBE háromszögeket kirajzoljuk. A két háromszög hasonló (megfelelő szögeik egyenlők), így

$$\frac{x}{1,5} = \frac{x+20}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ méter.}$$



787 A mellékelt ábrán található szög koszinuszát kifejezzük a koszinusztételből:

$$50^2 = 38^2 + 72^2 - 2 \cdot 38 \cdot 72 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{43}{57}.$$



A hajó és a kikötő x távolságának meghatározását is koszinusztétellel végezzük el:

$$x^2 = 38^2 + 36^2 - 2 \cdot 38 \cdot 36 \cdot \frac{43}{57} \quad \Rightarrow \quad x \approx 26 \text{ km.}$$

Tehát 26 km utat kell még a hajónak megtennie a kikötőig.

788 Egy szelet alapterülete a henger alapterületének 16-od része:

$$T = \frac{15^2 \cdot \pi}{16} \approx 44,18 \text{ cm}^2.$$

Így egy szelet térfogata:

$$V = 44,18 \cdot 10 = 441,8 \text{ cm}^3.$$

789 *a)* A fazék (henger) térfogatából kiszámoljuk a sugarat:

$$8000 = r^2 \cdot \pi \cdot 30 \quad \Rightarrow \quad r \approx 9,2 \text{ cm.}$$

A fazékba töltött víz térfogatából meghatározzuk a víz magasságát:

$$3000 = 9,2^2 \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad m \approx 11,3 \text{ cm} \text{ magasan áll benne a víz.}$$

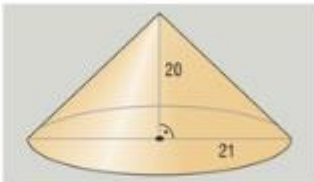
b) A zöldségek által kiszorított víz is henger alakú, amelynek térfogata:

$$V = 9,2^2 \cdot \pi \cdot 4 \approx 1063,6 \text{ cm}^3 \approx 1 \text{ liter a zöldségek térfogata.}$$

790 *a)* Forgáskúpot kapunk:

$$r = 21 \text{ cm}, \quad m = 20 \text{ cm},$$

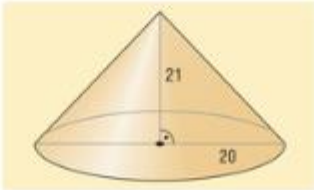
$$V_1 = \frac{21^2 \cdot \pi \cdot 20}{3} \approx 9236,3 \text{ cm}^3.$$



b) Forgáskúpot kapunk:

$$r = 20 \text{ cm}, \quad m = 21 \text{ cm},$$

$$V_2 = \frac{20^2 \cdot \pi \cdot 21}{3} \approx 8796{,}5 \text{ cm}^3.$$



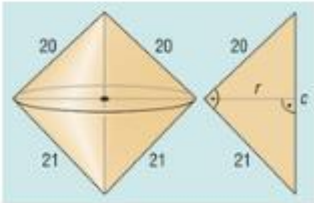
c) Két, közös alapú forgáskúpot kapunk, melynek teljes magassága a háromszög átfogója, ezért a Pitagorasz-tétellel:

$$c^2 = 20^2 + 21^2, \quad \text{amiből} \quad c = 29 \text{ cm}.$$

Alapkörének sugara az átfogóhoz tartozó magasság, amit a háromszög területének kétféle módon történő felírásából számolunk ki:

$$29 \cdot r = 20 \cdot 21, \quad \text{amiből} \quad r = \frac{420}{29} \approx 14{,}48 \text{ cm}.$$

$$V_3 = \frac{\left(\frac{420}{29}\right)^2 \cdot \pi \cdot 29}{3} \approx 6369{,}8 \text{ cm}^3.$$



Emiatt: $V_3 < V_2 < V_1$.

791 Az alapkör kerületéből meghatározzuk a homokkúp sugarát:

$$15{,}71 = 2r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r \approx 2{,}5 \text{ m}.$$

A homok (kúp) térfogatából kiszámoljuk a magasságot:

$$3 = \frac{2{,}5^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad m \approx 0{,}46 \text{ m}.$$

Tehát a homokkúp magassága 46 cm.

792 A kúp és a gömb közös tengelymetszetében a háromszögbe írt kör sugarát keressük. Először kiszámoljuk az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögét:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{35}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 71°.$$

A háromszögbe írt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, így

$$\operatorname{tg} 35{,}5° = \frac{r}{12} \quad \Rightarrow \quad r \approx 8{,}56 \text{ cm}.$$

A gömb sugara 8,56 cm.